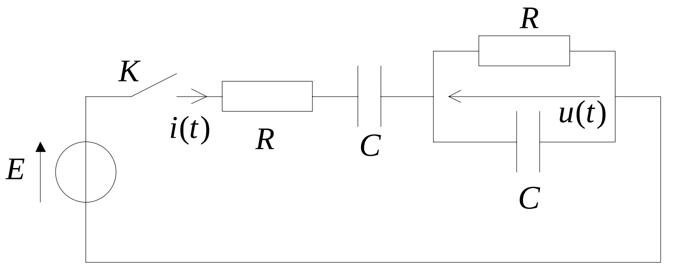
-EXERCICE 3.4-

• ENONCE :

« Circuit (RC série) en série avec un circuit (RC parallèle) »



Les condensateurs sont initialement déchargés, et le courant i(t) est nul.

A t=0, on ferme l'interrupteur K.

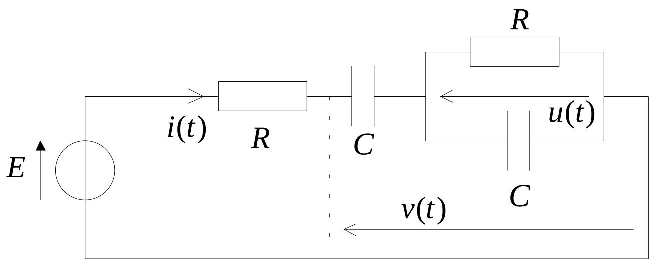
Question : pour $t \geq 0$, déterminer la fonction $u(t)$ et tracer la courbe correspondante.

Rq : on déterminera la phase $\omega_0 t_0$ pour laquelle $u(t)$ est maximum, avec $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$; on calculera également le rapport $\dfrac{u_{\max}}{E}$.

• CORRIGE :

«Circuit (RC série) en série avec un circuit (RC parallèle »

• Introduisons une tension intermédiaire $v(t)$:



On a les équations suivantes:

$$i(t)=\frac{E-v(t)}{R}=C\frac{d[v(t)-u(t)]}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{E-v(t)}{R}=\frac{u(t)}{R}+C\frac{du(t)}{dt} \quad (2)$$

• La relation (2) fournit : $v(t)=E-u(t)-RC\frac{du(t)}{dt}$; la (1) donne : $v(t)+RC\frac{dv(t)}{dt}=E+RC\frac{du(t)}{dt}$

$$\Rightarrow \quad E+RC\frac{du(t)}{dt}=E-u(t)-RC\frac{du(t)}{dt}+RC\left(\frac{dE}{dt}-\frac{du(t)}{dt}-RC\frac{d^2u(t)}{dt^2}\right) \Rightarrow$$

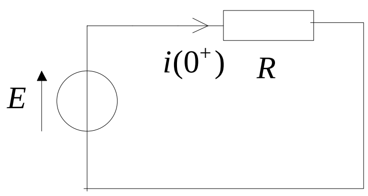
$$\boxed{\frac{d^2u(t)}{dt^2}+3\omega_0\times\frac{du(t)}{dt}+\omega_0^2\times u(t)=0} \qquad \text{avec : } \boxed{\omega_0=\frac{1}{RC}}$$

• Le discriminant du polynôme caractéristique vaut : $\Delta=9\omega_0^2-4\omega_0^2=5\omega_0^2 \Rightarrow$ les racines de ce polynôme sont : $\boxed{r=-\frac{3\omega_0}{2}\pm\frac{\sqrt{5}\omega_0}{2}}$; on en déduit la forme de la solution **apériodique** :

$$u(t)=\exp\left(-\frac{3\omega_0}{2}\times t\right)\times\left[A\exp\left(\frac{\sqrt{5}\omega_0}{2}\times t\right)+B\exp\left(-\frac{\sqrt{5}\omega_0}{2}\times t\right)\right] \quad (3)$$

• La tension aux bornes d'un condensateur étant continue, on a : $u(0^-)=u(0^-)=0 \Rightarrow \boxed{A+B=0}$

En remarquant que les tensions $u(0^+)$ et $v(0^+)$ sont nulles, le circuit se ramène alors à :



On trouve donc:

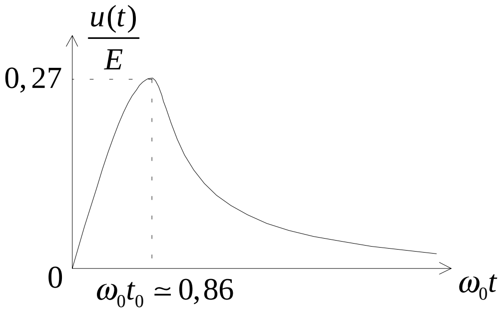
$$\boxed{i(0^+)=C\frac{du(0^+)}{dt}=\frac{E}{R}}$$

Rq : c'est bien le courant $i(0^+)$ qui traverse intégralement le condensateur, qui se comporte comme un fil en parallèle sur la résistance R.

• En dérivant la relation (3), en multipliant par C et en faisant $t=0$, il vient : $\boxed{A=-B=\frac{E}{\sqrt{5}}}$;

d'où : $$\boxed{u(t)=\frac{2E}{\sqrt{5}}\times\exp\left(-\frac{3\omega_0}{2}\times t\right)\times\sinh\left(\frac{\sqrt{5}\omega_0}{2}\times t\right)}$$

• La courbe a l'allure suivante :



Le maximum de $u(t)$ est donné par:

$$\frac{du(t)}{dt}=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\omega_0 t_0=\frac{2}{\sqrt{5}}\arg th(\sqrt{5}/3)\simeq 0,86}$$

On en déduit: $$\boxed{\frac{u(t_0)}{E}\simeq 0,27}$$